

UNE ÉTUDE DES REPRÉSENTATIONS MODULO p DE $SL_2(F)$

RAMLA ABDELLATIF

RÉSUMÉ. A la suite des travaux de Barthel-Livné [6, 7] et Breuil [8], nous étudions les représentations modulo p de $SL_2(F)$ lorsque F est un corps local complet de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. En particulier, nous les relierons aux représentations modulo p de $GL_2(F)$ et, lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous donnons une description explicite des représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, qui apparaissent par paquets de taille 1 ou 2.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Rappels et compléments	3
2. Lien entre les représentations de $GL_2(F)$ et de $SL_2(F)$	7
3. Représentations non supersingulières de $SL_2(F)$	7
4. Représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$	12
Annexe A. Étude des séries principales « à la Barthel-Livné »	19
Annexe B. Détails de la preuve du Théorème 4	26
Annexe C. Calculs de la Section 4.3	28
Références	30

INTRODUCTION

Soient p un nombre premier et F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p . Dans les années 90, Barthel et Livné [6] ont donné une classification des représentations modulo p de $GL_2(F)$ faisant ainsi apparaître une famille de représentations dites supersingulières dont la description explicite est inconnue dans le cas général. Le seul cas bien connu est celui où $F = \mathbb{Q}_p$, dans lequel les travaux de Breuil [8] permettent de décrire complètement les représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et d'obtenir ce qu'il appelle une « correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p » [8, Définition 4.2.4].

L'objectif de ce papier est d'étudier les représentations modulo p de $SL_2(F)$. En effet, le groupe $SL_2(F)$ est assez proche de $GL_2(F)$ pour que l'on puisse espérer obtenir des résultats analogues, mais suffisamment différent pour que l'on voie déjà apparaître quelques divergences pouvant peut-être aider à comprendre ce qui bloque dans l'étude des représentations modulo p de $GL_2(F)$ lorsque F n'est pas \mathbb{Q}_p , voire de $GL_n(F)$.

Présentation des principaux résultats. Nous commençons par démontrer un résultat de classification analogue à [6, page 290] lorsque F est de caractéristique différente de 2.

Théorème 1. *Supposons que F soit de caractéristique différente de 2.*

- (1) *Les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles à caractère central de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ se partitionnent en quatre familles :*

- (a) le caractère trivial ;
 - (b) les séries principales ;
 - (c) les séries spéciales ;
 - (d) les supersingulières.
- (2) Il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations provenant de familles différentes.

L'hypothèse sur la caractéristique de F est une hypothèse technique (cf. Section 2). Nous pensons cependant que le Théorème 1 est valable en caractéristique quelconque.

Nous prouvons au passage le résultat suivant, valable en toute caractéristique, qui permet de comparer les représentations non supersingulières de $SL_2(F)$ à celles de $GL_2(F)$.

Théorème 2. (1) Si $\eta : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ définit une représentation en séries principales de G , alors on a un isomorphisme naturel de G_S -représentations :

$$\text{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1}) \simeq \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) .$$

- (2) On a un isomorphisme naturel de G_S -représentations :

$$Sp \simeq Sp_S .$$

- (3) La restriction à G_S de la représentation $\text{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ est naturellement isomorphe à $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$.

Le Théorème 1 permet aussi d'obtenir facilement l'équivalence entre les notions de supercuspidalité et de supersingularité pour les représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$.

Corollaire 1. Une représentation lisse irréductible de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est supersingulière si et seulement si elle est supercuspidale.

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, on utilise les résultats de Breuil [8] pour construire explicitement des représentations supersingulières $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ (avec $0 \leq r \leq p-1$) qui permettent de prouver le théorème suivant.

Théorème 3. On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$.

- (1) Les représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ sont exactement (à isomorphisme près) les représentations $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ avec $r \in \{0, \dots, p-1\}$.
- (2) Les représentations $\pi_{r,\infty}$ sont deux à deux non isomorphes pour r parcourant $\{0, \dots, p-1\}$. De même, les représentations $\pi_{r,0}$ sont deux à deux non isomorphes pour r parcourant $\{0, \dots, p-1\}$.
- (3) Les représentations $\pi_{r,0}$ et $\pi_{s,\infty}$ sont isomorphes si et seulement si $s+r = p-1$.
- (4) Toute représentation supersingulière de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ restreinte à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ se décompose en somme directe de deux représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Plan de l'article. Dans la Section 1, nous rappelons tout d'abord quelques résultats et notations apparaissant dans l'étude menée dans [6, 7, 8] pour $GL_2(F)$, puis nous donnons les notations et les résultats correspondants pour $SL_2(F)$.

Dans la Section 2, nous démontrons un résultat analogue à [11, Proposition 2.2] lorsque F est de caractéristique différente de 2. Il permet notamment de justifier pourquoi l'étude des représentations supersingulières effectuée dans la Section 4 se ramène à l'étude des restrictions à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ des représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

La Section 3 sera consacrée à la preuve du Théorème 2 puis du Théorème 1, tandis que le Théorème 3 sera démontré dans la Section 4, où nous dirons quelques mots sur ce qui advient de la correspondance de Langlands modulo p obtenue par Breuil dans le cas de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Quelques remarques.

Remarque 1. Signalons une fois pour toutes que la torsion d'une représentation lisse de $GL_2(F)$ par un $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère lisse de $GL_2(F)$ (qui est nécessairement de la forme $\chi \circ \det$ avec $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse) ne modifie clairement pas la représentation de $SL_2(F)$ obtenue par restriction.

Remarque 2. Mentionnons ici que, durant la rédaction de ce papier, C. Cheng a démontré de manière indépendante une partie des résultats que nous prouvons ici [10]. Nous le remercions de nous avoir communiqué ses notes.

Nous tenons aussi à remercier G. Henniart, sous la direction de qui ce travail a été effectué, pour son intérêt et ses remarques pertinentes sur une version préliminaire de cet article.

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1.1. Notations générales. On fixe un nombre premier p ainsi qu'un corps local complet F de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. On désigne par \mathcal{O}_F l'anneau des entiers de F , on en fixe une fois pour toutes une uniformisante $\varpi_F \in \mathcal{O}_F$ et on note $k_F = \mathcal{O}_F/(\varpi_F)$ le corps résiduel de F : c'est une extension finie (de degré noté f) du corps à p éléments \mathbb{F}_p , dont on fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ contenant k_F . On fixe aussi un plongement $\iota : k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ et on note v_F la valuation ϖ_F -adique de F que l'on a normalisée par $v_F(\varpi_F) = 1$.

Sauf mention contraire explicite, toutes les représentations considérées dans la suite seront à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$.

1.2. Rappels de théorie des représentations. Soient H un groupe topologique et π une représentation de H sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel V .

On dit que π est *irréductible* si $V \neq \{0\}$ et si les seuls sous-espaces vectoriels de V stables sous l'action de H sont $\{0\}$ et V .

On dit que π est une représentation *lisse* de H si pour tout élément v de V , le sous-groupe $\text{Stab}_H(v)$ des éléments de H fixant v est un sous-groupe ouvert de H . On dit que π est une représentation *admissible* lorsqu'elle est lisse et que, pour tout sous-groupe ouvert K de H , l'espace V^K des vecteurs de V fixes sous l'action de K est un $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel de dimension finie.

On dit que π est un *caractère modulo p de H* lorsque V est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Enfin, si Z_H désigne le centre de H , et si η est un caractère modulo p de Z_H , on dit que π *admet pour caractère central η* si l'action de Z_H sur V est donnée par le

caractère η .

Le résultat que nous rappelons maintenant [6, Lemma 3] est un fait crucial de la théorie des représentations modulo p dont nous nous servirons constamment.

Proposition 1. *Soient P un pro- p -groupe et V une représentation lisse non nulle de P sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Alors V contient un vecteur fixe non trivial sous l'action de P .*

Enfin, pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on note $\mu_\lambda : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère non ramifié (i.e. trivial en restriction au groupe des unités \mathcal{O}_F^\times de F) envoyant ϖ_F sur λ .

1.3. Éléments et sous-groupes remarquables de $GL_2(F)$. Les notations introduites ici sont essentiellement celles utilisées dans [8] et [15].

On considère le groupe $G := GL_2(F)$, dont $K := GL_2(\mathcal{O}_F)$ est à conjugaison près l'unique sous-groupe compact maximal, et dont le centre est $Z := F^\times I_2$ avec $I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori standard et $I(1)$ son unique pro- p -sous-groupe de Sylow (que l'on appelle le pro- p -Iwahori de K). Ils correspondent respectivement à l'image réciproque par l'application de réduction modulo ϖ_F du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes (i.e. dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1) de $GL_2(k_F)$.

On note B le sous-groupe de Borel de G constitué des matrices triangulaires supérieures, T le tore maximal déployé des matrices diagonales et U le radical unipotent de B . Rappelons que B admet alors la décomposition $B = TU$.

On définit les matrices suivantes :

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix} ; \beta := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_F & 0 \end{pmatrix} ; \omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Elles satisfont en particulier l'égalité $\beta\omega = \alpha$.

1.4. Poids de Serre de $GL_2(F)$. On rappelle que l'on a fixé une fois pour toute une uniformisante ϖ_F de F car ce qui suit dépend du choix de cette uniformisante. Pour tout entier $r \in \{0, \dots, p-1\}$, on note $Sym^r(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ (ou σ_r) l'unique représentation

de KZ ayant pour espace sous-jacent $\bigoplus_{i=0}^r \overline{\mathbb{F}}_p x^{r-i} y^i$ sur lequel $\varpi_F I_2$ agit trivialement

et sur lequel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$ agit par¹ :

$$\sigma_r\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(x^{r-i} y^i) := (ax + cy)^{r-i} (bx + dy)^i .$$

Notons $q = p^f$ le nombre d'éléments de k_F . Pour tout f -uplet d'entiers $\vec{r} := (r_0, \dots, r_{f-1})$ de $\{0, \dots, p-1\}^f$, on définit $\sigma_{\vec{r}}$ comme étant l'unique représentation de KZ ayant pour espace sous-jacent

$$V_{\vec{r}} := Sym^{r_0}(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} Sym^{r_1}(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \dots \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} Sym^{r_{f-1}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$$

1. Dans le membre de droite, les coefficients sont les réductions modulo ϖ_F des coefficients de la matrice de K .

sur lequel $\varpi_F I_2$ agit trivialement et sur lequel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$ agit par

$$\sigma_{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(v_0 \otimes \dots \otimes v_{f-1}) := \bigotimes_{j=0}^{f-1} \sigma_{r_j}\left(\begin{pmatrix} a^{p^j} & b^{p^j} \\ c^{p^j} & d^{p^j} \end{pmatrix}\right)(v_j)$$

A isomorphisme et torsion par un caractère lisse près, les $\sigma_{\vec{r}}$ donnent toutes les représentations lisses irréductibles de KZ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ [6, Proposition 4]. On appelle *poids de Serre de K* une classe d'isomorphisme de telles représentations (ou, par abus, l'une des représentations $\sigma_{\vec{r}}$).

1.5. Algèbres de Hecke sphériques de $GL_2(F)$. Soient H un sous-groupe ouvert, compact modulo Z de G et π une représentation lisse de H . On leur associe une algèbre de Hecke $\mathcal{H}_G(H, \sigma)$ définie par :

$$\mathcal{H}_G(H, \sigma) := \text{End}_G(\text{c-ind}_H^G(\sigma)) .$$

Considérons le cas où $H = KZ$ et $\sigma = \sigma_{\vec{r}}$ est l'un des poids de Serre définis dans la Section 1.4. Barthel et Livné [6, Proposition 8] ont alors isolé un opérateur $T_{\vec{r}} \in \mathcal{H}_G(KZ, \sigma_{\vec{r}})$ qui engendre $\mathcal{H}(KZ, \sigma_{\vec{r}})$ et fournit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$ -algèbres

$$\mathcal{H}(KZ, \sigma_{\vec{r}}) \simeq \overline{\mathbb{F}}_p[T_{\vec{r}}] .$$

Cet opérateur leur permet de définir les représentations conoyau suivantes : pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, on note $\pi(\vec{r}, \lambda, 1)$ le conoyau du morphisme G -équivariant

$$T_{\vec{r}} - \lambda : \text{c-ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) \rightarrow \text{c-ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) .$$

Ils définissent alors la notion de représentation supersingulière de $GL_2(F)$ comme suit [7, page 290] : une représentation lisse irréductible π de $GL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est dite *supersingulière* s'il existe un paramètre \vec{r} tel qu'à torsion par un caractère lisse près, π soit un quotient irréductible de $\pi(\vec{r}, 0, 1)$.

D'autre part, on associe à tout couple $(g, v) \in G \times V_{\vec{r}}$ la fonction élémentaire $[g, v] \in \text{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ définie par :

$$\forall h \in G, [g, v](h) := \begin{cases} 0 & \text{si } h \notin KZg^{-1} \\ \sigma_{\vec{r}}(hg)(v) & \text{si } h \in KZg^{-1} \end{cases} .$$

On note $\overline{[g, v]}$ son image modulo $T_{\vec{r}}$ (i.e. dans $\pi(\vec{r}, 0, 1)$). On a alors immédiatement les deux propriétés suivantes :

- i) $\forall g, g_1 \in G, \forall v \in \sigma_{\vec{r}}, g([g_1, v]) = [gg_1, v]$;
- ii) $\forall g \in G, \forall k \in KZ, \forall v \in \sigma_{\vec{r}}, [gk, v] = [g, \sigma_{\vec{r}}(k)(v)]$.

1.6. Données immobilières. On note X l'arbre de Bruhat-Tits de G (qui est celui de SL_2 , cf. [17] pour plus de détails), x_0 son « sommet standard » (noté v_0 dans [6]), qui correspond à la classe d'homothétie du réseau standard $\mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F$ du F -espace vectoriel F^2 , et $x_1 := \alpha x_0$.

L'arbre X est naturellement muni d'une distance (la distance entre deux sommets est définie comme le nombre minimal d'arêtes constituant un chemin dans X entre ces sommets) ainsi que d'une action transitive de G pour laquelle x_0 admet KZ comme stabilisateur. Ceci permet notamment d'identifier le support des fonctions $[g, v]$ aux sommets de X (en identifiant le support de $[g, v]$ au sommet gx_0) et, de manière plus générale, le support de toute fonction $f \in \text{c-ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ à une famille finie de sommets de X .

On appellera *cercle* (resp. *boule*) de rayon n l'ensemble des sommets de X situés à

distance n (resp. $\leq n$) du sommet x_0 .

1.7. Compléments concernant $SL_2(F)$.

1.7.1. *Notations.* Nous nous intéressons dans ce papier au groupe spécial linéaire $G_S := SL_2(F)$ dont un sous-groupe compact maximal est donné par $K_S := SL_2(\mathcal{O}_F)$. Celui-ci contient le centre $Z_S := \{I_2, -I_2\}$ de G_S , qui est trivial lorsque $p = 2$. On note $I_S = I \cap K_S$ le sous-groupe d'Iwahori standard de G_S , $I_S(1) = I(1) \cap K_S$ son pro- p -Iwahori, $B_S = B \cap G_S$ le sous-groupe de Borel de G_S constitué des matrices triangulaires supérieures, T_S son tore maximal déployé (formé de l'ensemble des matrices diagonales), de sorte que l'on a de nouveau $B_S = T_S U$. On introduit aussi les matrices suivantes de G_S :

$$s := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \alpha_0 := \begin{pmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} ; \beta_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\varpi_F^{-1} \\ \varpi_F & 0 \end{pmatrix} .$$

En particulier, on a $\beta_0 = s\alpha_0$ et $s = \alpha_0\beta_0$.

1.7.2. *Données immobilières.* Comme nous l'avons déjà signalé, le groupe G_S possède le même arbre de Bruhat-Tits que G , sur lequel G_S agit cette fois de manière non transitive. Plus précisément, l'action de G_S partitionne les sommets de X en deux orbites (disjointes) : celle de x_0 , que l'on notera X_p et qui est constituée des cercles de rayon pair dans X , et celle de x_1 , que l'on notera X_{imp} et qui est constituée des cercles de rayon impair dans X . Le résultat suivant est alors immédiat.

Proposition 2. *Toute fonction $f \in c\text{-ind}_{KZ}^G(\sigma_{\bar{r}})$ se décompose de manière unique sous la forme*

$$f = f_p + f_{imp}$$

avec f_p (resp. f_{imp}) élément de $c\text{-ind}_{KZ}^G(\sigma_{\bar{r}})$ à support dans X_p (resp. X_{imp}).

De plus, les formules donnant l'action de $T_{\bar{r}}$ sur $c\text{-ind}_{KZ}^G(\sigma_{\bar{r}})$ [8, (4) page 7] montrent que l'action de $T_{\bar{r}}$ sur X , définie par la description du support de $T_{\bar{r}}(f)$ sur l'arbre en fonction du support de $f \in c\text{-ind}_{KZ}^G(\sigma_{\bar{r}})$, vérifie les deux inclusions suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} T_{\bar{r}}(X_p) \subset X_{imp} ; \\ T_{\bar{r}}(X_{imp}) \subset X_p . \end{cases}$$

1.7.3. *Poids de Serre et supersingularité.* De manière analogue à ce qui est fait dans le cas de GL_2 , on appelle *poids de Serre de K_S* une classe d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $K_S Z_S$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (ou, par abus, une telle représentation). Ces poids de Serre sont bien connus [12, Section 1] : un système de représentants en est fourni par les représentations inflatées à partir de la restriction à $SL_2(k_F)$ des représentations $\sigma_{\bar{r}}$ définies dans la section 1.4.

D'autre part, on connaît la structure des algèbres de Hecke sphériques associées à ces poids [1, Théorème 1] : elles sont isomorphes à des algèbres de polynômes $\overline{\mathbb{F}}_p[\tau_{\bar{r}}]$, où l'opérateur $\tau_{\bar{r}}$ agit sur les fonctions $[g, v]$ (et sur l'arbre X) comme le fait l'opérateur $T_{\bar{r}}^2$. Ceci nous permet de donner la définition suivante pour les représentations supersingulières de G_S : ce sont, lorsqu'ils existent, les quotients irréductibles des

$$\text{représentations conoyau } \frac{c\text{-ind}_{K_S Z_S}^{G_S}(\sigma_{\bar{r}})}{\tau_{\bar{r}}(c\text{-ind}_{K_S Z_S}^{G_S}(\sigma_{\bar{r}}))} .$$

2. LIEN ENTRE LES REPRÉSENTATIONS DE $GL_2(F)$ ET DE $SL_2(F)$

Proposition 3. *Supposons que F soit de caractéristique différente de 2.*

Soit σ une représentation lisse irréductible à caractère central de G_S . Il existe une représentation lisse irréductible π de G ayant un caractère central prolongeant celui de σ et telle que la restriction de π à G_S contienne σ .

Démonstration. Plusieurs démonstrations de ce résultat sont possibles. Nous donnons ici une preuve utilisant un argument de filtration par le socle : soit σ une représentation lisse irréductible de G_S . On l'étend en une représentation lisse de $G_S Z$ (encore notée σ) en faisant agir Z par un caractère lisse étendant l'action de Z_S , puis l'on considère la représentation induite $\Pi := \text{Ind}_{G_S Z}^G(\sigma)$. Comme $G_S Z$ est un sous-groupe normal d'indice fini de G , Π est une représentation de G de longueur finie, ce qui signifie qu'elle peut être filtrée par une suite finie de G -modules

$$\{0\} = \Pi_m \subset \Pi_{m-1} \subset \dots \subset \Pi_1 \subset \Pi_0 = \Pi$$

telle que pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$, le quotient $\pi_i := \Pi_i / \Pi_{i+1}$ soit un G -module irréductible.

Notons $r \in \{0, \dots, m-1\}$ le plus grand entier tel que $\sigma \cap \Pi_r$ soit non nul. Par irréductibilité de σ comme représentation de G_S , on obtient que σ est contenue dans Π_r , tandis que la maximalité de r implique que $\sigma \cap \Pi_{r+1}$ est nul. Ceci permet de voir σ comme une sous-représentation de $\Pi_r / \Pi_{r+1} = \pi_r$, qui est par construction une représentation de G irréductible. On peut donc conclure en prenant $\pi := \pi_r$. \square

Remarque 3. On peut même démontrer [14, Lemma 2.4] que, lorsque F est de caractéristique nulle (i.e. une extension finie de \mathbb{Q}_p), la restriction de toute représentation lisse irréductible admissible de G à G_S se décompose en une somme directe finie de représentations lisses irréductibles de G_S .

3. REPRÉSENTATIONS NON SUPERSINGULIÈRES DE $SL_2(F)$

3.1. Caractères de G_S . De manière générale, l'abélianisé de SL_n est trivial pour tout entier $n \geq 2$, de sorte que tout homomorphisme de groupes de SL_n à valeurs dans un groupe abélien est trivial. On en déduit que l'on a en particulier l'énoncé suivant.

Proposition 4. *Le seul caractère lisse de G_S à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est le caractère trivial.*

3.2. Représentations de la série principale.

3.2.1. Terminologie. On commence par rappeler la description des caractères modulaires lisses du sous-groupe de Borel B_S .

Lemme 1. *Tout caractère lisse de B_S à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ s'obtient par inflation à partir d'un caractère lisse $\eta : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. On note encore η (ou $\eta \otimes \mathbf{1}$) ce caractère.*

Démonstration. Soit $\chi : B_S \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse. Comme $(\overline{\mathbb{F}}_p^\times, \times)$ est un groupe abélien, χ se factorise à travers l'abélianisé de B_S , qui n'est autre que le tore diagonal $T_S \simeq F^\times$. Autrement dit, il existe un caractère lisse $\eta : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que : $\forall \lambda \in F^\times, \forall b \in F$,

$$\chi\left(\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right) = \eta(\lambda)$$

ce qui est le résultat demandé. \square

Remarque 4. La même construction permet d'obtenir un caractère $\eta := \eta_1 \otimes \eta_2$ de B à partir de deux caractères lisses η_1, η_2 de F^\times . Lorsque l'on restreint η à B_S , on récupère le caractère $(\eta_1 \eta_2^{-1}) \otimes \mathbf{1} = \eta_1 \eta_2^{-1}$.

Soit $\eta : B_S \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse. On lui associe par induction lisse à partir de B_S une représentation de G_S notée $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ qui a pour espace de représentation le $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel des fonctions $f : G_S \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ localement constantes telles que

$$\forall (b, g) \in B_S \times G_S, f(bg) = \eta(b)f(g)$$

sur lequel G_S agit par translations à droite :

$$\forall (g, x) \in G_S \times G_S, (g \cdot f)(x) := f(xg).$$

Lorsqu'une telle représentation est irréductible, on dit que c'est une représentation *de la série principale* de G_S . La même terminologie vaut pour les représentations de G obtenues par induction parabolique à partir d'un caractère lisse modulo p de B .

3.2.2. Critère d'irréductibilité des séries principales. L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit $\eta : B_S \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse non trivial. La représentation $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est alors une représentation lisse irréductible de G_S ayant pour caractère central η .*

Le seul point non trivial de cet énoncé est l'assertion d'irréductibilité. Une première méthode de démonstration consiste à reprendre les étapes de la preuve effectuée par Barthel-Livné pour les séries principales de $GL_2(F)$ et à les adapter au cas de $SL_2(F)$: c'est ce que nous faisons dans l'Annexe A.

Une seconde méthode possible repose sur l'étude de la restriction à B_S des séries principales de G_S . Un premier intérêt est qu'elle semble plus susceptible que la première d'être généralisable, comme en attestent par exemple les travaux de Vignéras [21]. Un second avantage est qu'elle ne nécessite pas de distinguer le cas ramifié du cas non ramifié, ce qui est le cas dans la méthode de Barthel-Livné.

Nous donnons ici les grandes étapes de la seconde méthode : pour les détails, nous renvoyons à l'Annexe B. On commence par observer que l'application d'évaluation en I_2 permet facilement de voir² que la restriction à B_S de $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est de longueur 2 avec pour quotient le caractère η et pour sous-objet le sous-espace W des éléments à support dans $B_S U$. Par suite, si $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est une représentation réductible de G_S , elle est aussi de longueur 2 et admet un sous-quotient de dimension 1, qui est nécessairement le caractère trivial de G_S par la Proposition 4. L'étude du module de Jacquet associé à $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ implique alors, par un raisonnement analogue à celui mené dans le cadre classique des représentations complexes, que η doit être le caractère trivial de B_S , ce qui prouve le Théorème 4 par contraposition.

3.3. Représentations en séries spéciales. Pour compléter ce qui a été fait dans la section précédente, il nous reste à étudier la représentation $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ obtenue par induction parabolique du caractère trivial de B_S . Il est facile de voir qu'elle n'est pas irréductible puisque l'espace des fonctions constantes sur G_S , sur lequel G_S agit trivialement, en est une sous-représentation propre évidente. Notons $\mathbf{1}$ cette représentation et considérons le quotient $Sp_S := \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})/\mathbf{1}$ qui lui est associé. Nous allons démontrer le résultat suivant, qui est le pendant de [7, Theorem 28].

Théorème 5. *La représentation Sp_S est irréductible.*

². On peut aussi voir ce résultat comme un cas particulier de [21, Théorème 1].

Pour ce faire, nous allons donner une autre description de Sp_S qui nous permettra de conclure par l'étude de l'espace des $I_S(1)$ -invariants de Sp_S .

La décomposition de Bruhat pour G_S implique que le quotient $B_S \backslash G_S$ est topologiquement isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}^1(F)$. Par suite, la représentation $Ind_{B_S}^{G_S}(1)$ s'identifie à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))$ des fonctions localement constantes sur $\mathbb{P}^1(F)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ sur lequel G_S agit par translations à droite, et Sp_S s'identifie au quotient $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))/\{\text{constantes}\} \simeq \mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))/W$ avec W un $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $I_S(1)$ agit trivialement.

Les preuves des Lemmes 26 et 27 de [7] sont encore valables pour G_S et I_S , ce qui fournit directement l'énoncé suivant.

Lemme 2. *On dispose de la suite exacte courte suivante de $I_S(1)$ -modules :*

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F)))^{I_S(1)} \longrightarrow (Sp_S)^{I_S(1)} \longrightarrow 0 .$$

Remarque 5. La décomposition $G_S = B_S I_S(1) \sqcup B_S \beta_0 I_S(1)$ permet de nouveau de démontrer que le G_S -module $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))$ est engendré par le sous-espace de dimension 2 formé par ses vecteurs $I_S(1)$ -invariants.

Preuve du Théorème 5 : Soit π une sous-représentation non nulle de Sp_S . La Proposition 1 appliquée au pro- p -groupe $I_S(1)$ assure que l'on a $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \pi^{I_S(1)} \geq 1$. Notons V le relèvement de π à $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))$. Le Lemme 2 assure alors que l'on a la chaîne d'inégalités suivante :

$$2 = \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} (\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F)))^{I_S(1)} \geq \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} V^{I_S(1)} = 1 + \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \pi^{I_S(1)} \geq 2 ,$$

qui implique que $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} V^{I_S(1)} = 2$, donc que V possède les mêmes $I_S(1)$ -invariants que $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))$. La Remarque 5 implique alors que $V = \mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))$ et donc que $\pi = Sp_S$, ce qui prouve le Théorème 5.

Pour terminer cette section, signalons que nous disposons du résultat suivant, qui est l'analogue de [7, Theorem 29] pour Sp_S .

Théorème 6. *La représentation Sp_S est le seul sous-quotient non trivial de $Ind_{B_S}^{G_S}(1)$.*

Démonstration. On suit de nouveau le raisonnement de Barthel-Livné : comme $Ind_{B_S}^{G_S}(1)$ est une représentation de G_S de longueur 2, il nous suffit de prouver que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow Ind_{B_S}^{G_S}(1) \longrightarrow Sp_S \longrightarrow 0$$

est non scindée pour conclure.

Si ℓ est une fonction G_S -invariante sur $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))$, elle vérifie

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_0}) &= \ell(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}) \\ &= \sum_{x \in k_F} \ell(\mathbf{1}_{x + \varpi_F \mathcal{O}_F}) \\ &= \sum_{x \in k_F} \ell\left(\begin{pmatrix} \varpi_F & x \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}\right) \\ &= q\ell(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}) && \text{par } G_S\text{-invariance de } \ell \\ &= 0 && \text{car } q = \text{card } k_F \text{ est nul modulo } p. \end{aligned}$$

Comme on a aussi

$$\ell(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_\infty}) = \ell(\beta_0 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_0}) = \ell(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_0}) = 0 ,$$

on obtient que ℓ est identiquement nulle puisque $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_\infty}$ et $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_0}$ engendrent $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(F))$. \square

3.4. Preuve du Théorème 2. On rappelle tout d'abord le Théorème suivant dû à Barthel et Livné [6, Theorem 30].³

Théorème 7. *Soit $\eta : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

- (1) *Si η est non trivial, alors $\text{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1})$ est une représentation irréductible de G .*
- (2) *La représentation $\text{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ est de longueur 2; elle contient comme unique sous-objet la représentation triviale, et son quotient est isomorphe à la représentation spéciale Sp .*

Pour démontrer le Théorème 2, on remarque tout d'abord qu'il existe un plongement naturel des induites paraboliques de G dans celles de G_S .

Proposition 5. *Soit $\eta : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse. L'application naturelle de restriction induit un plongement G_S -équivariant*

$$\text{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1}) \hookrightarrow \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) .$$

Démonstration. Soit $f \in \text{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1})$. Sa restriction à G_S est alors une fonction lisse qui satisfait :

$$\forall b \in B_S, \forall g \in G_S, f(bg) = \eta(b)f(g) ,$$

de sorte qu'elle définit bien un élément de $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. De plus, l'application de restriction est clairement G_S -équivariante puisque G_S agit sur les deux espaces de la même manière. Reste donc à prouver son injectivité, qui provient de la décomposition $G = BG_S$. En effet, si $f \in \text{Ind}_B^G(\eta)$ est de restriction à G_S identiquement nulle et si $g \in G$ se décompose sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_s$$

avec $u := \det g \in F^\times$ et $g_s \in G_S$, on a alors

$$f(g) = f(ug_s) = \eta(u)f(g_s) = 0 ,$$

ce qui montre que f est identiquement nulle et termine la démonstration. \square

Corollaire 2. *Le premier point du Théorème 2 est vrai.*

Démonstration. La représentation $\text{Ind}_B^G(\eta)$ est une représentation non nulle de G_S et, sous les hypothèses demandées, $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est une représentation irréductible de G_S . Le plongement de la Proposition 5 est donc nécessairement un isomorphisme de G_S -représentations. \square

Nous démontrons maintenant les deux derniers points du Théorème 2. D'après le second point du Théorème 7, la restriction à G_S de $\text{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ contient la représentation triviale de G_S . Du coup, la Proposition 5 fournit naturellement un morphisme G_S -équivariant non nul

$$(2) \quad \text{Ind}_B^G(\mathbf{1})/\mathbf{1} \rightarrow \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})/\mathbf{1} .$$

Le membre de gauche de ce morphisme est la représentation spéciale Sp de G , dont la restriction à G_S est non nulle [7, Preuve de la Proposition 32], tandis que le membre de droite est la représentation spéciale Sp_S de G_S dont on a prouvé l'irréductibilité au Théorème 5. Ceci implique que le morphisme (2) est un isomorphisme de G_S -représentations, ce qui prouve le second point du Théorème 2. Le

3. Avec les notations de [6, Theorem 30], on a ici $\eta = \chi_1 \chi_2^{-1}$. On peut se limiter à considérer ce cas, quitte à tordre par le caractère $\chi_2 \circ \det$ (ce qui ne change pas les propriétés d'irréductibilité).

troisième point en s'en déduit alors directement par application du Lemme des cinq au diagramme à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{1} & \longrightarrow & \text{Ind}_B^G(\mathbf{1}) & \longrightarrow & Sp & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{1} & \longrightarrow & \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1}) & \longrightarrow & Sp_S & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

3.5. Quelques conséquences utiles. Nous donnons ici quelques conséquences utiles du Théorème 2 qui permettent notamment d'obtenir ce qui nous manque pour prouver le Théorème 1. Avant cela, on rappelle un fait simple mais important qui découle directement de la définition des représentations supersingulières : *toute représentation de G_S isomorphe à une représentation supersingulière est elle-même supersingulière.*

Corollaire 3. *Les représentations de la série principale de G_S et la représentation Sp_S ne sont pas supersingulières.*

Démonstration. La preuve de ce résultat repose sur le Théorème 30 (3) de [6] et sur le fait que les actions de $T_{\vec{r}}^2 \in \mathcal{H}_G(KZ, \sigma_{\vec{r}})$ et de $\tau_{\vec{r}} \in \mathcal{H}_{G_S}(K_S Z_S, \sigma_{\vec{r}})$ sur l'arbre de Bruhat-Tits X coïncident.

Nous traitons le cas des représentations de la série principale, le cas de la représentation spéciale s'obtenant de manière analogue. Soit donc η un caractère lisse non trivial de F^\times , que l'on écrit sous la forme $\eta := \mu_\lambda \omega^{\vec{r}}$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et $\vec{r} \in \{0, \dots, p-1\}^f$. D'après [6, Theorem 30 (3)], on sait que l'on dispose alors d'un isomorphisme de représentations de G :

$$\text{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1}) \simeq \pi(r, \lambda^{-1/2}, \eta \mu_{\lambda^{-1/2}})$$

où $\lambda^{-1/2} \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est une racine carrée de λ^{-1} . Le Théorème 2 assure que cet isomorphisme induit l'isomorphisme de représentations de G_S suivant :

$$(3) \quad \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) \simeq \pi(\vec{r}, \lambda^{-1/2}, 1)|_{G_S}.$$

D'après [6, Theorem 19], le membre de gauche de (3) est muni d'une structure de $\mathcal{H}_G(KZ, \sigma_{\vec{r}})$ -module à partir de l'action de cette algèbre de Hecke sur l'arbre de Bruhat-Tits X . En particulier, on sait que l'opérateur $T_{\vec{r}}$ agit sur $\pi(\vec{r}, \lambda^{-1/2}, 1)$ par le scalaire $\lambda^{-1/2}$, donc que l'opérateur $T_{\vec{r}}^2$ agit dessus par le scalaire $\lambda^{-1} \neq 0$. Ceci implique que l'opérateur $\tau_{\vec{r}}$, qui agit sur X de la même manière que $T_{\vec{r}}^2$, ne peut agir par 0 sur $\pi(\vec{r}, \lambda^{-1/2}, 1)|_{G_S}$, et donc que $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ n'est pas une représentation supersingulière de G_S . \square

Corollaire 4. *Soient σ une représentation lisse irréductible de G_S et Σ une représentation lisse irréductible de G telles que σ soit contenue dans $\Sigma|_{G_S}$. Alors Σ est supersingulière pour G si et seulement si σ est supersingulière pour G_S .*

Démonstration. Nous allons démontrer cette double implication par contraposition. Supposons tout d'abord que σ ne soit pas supersingulière pour G_S : le Théorème 2 implique alors que σ est isomorphe à la restriction à G_S d'une représentation irréductible non supersingulière de G ; elle ne peut donc pas être contenue dans une représentation irréductible supersingulière de G à cause de [6, Corollary 36], qui affirme qu'il n'existe pas d'entrelacements entre représentations supersingulières et non supersingulières de G .

Réciproquement, supposons que Σ ne soit pas une représentation supersingulière de G : la classification établie dans [6, page 290] assure alors que Σ est isomorphe à une représentation de la série principale de G ou à une représentation spéciale de G . De nouveau par le Théorème 2 (et par irréductibilité de σ), on obtient que σ est

isomorphe à une représentation de la série principale de G_S ou à la représentation Sp_S . Le Corollaire 3 implique alors que σ ne peut pas être supersingulière. \square

3.6. Preuve du Théorème 1. On suppose dans cette partie que F est de caractéristique différente de 2 afin de pouvoir utiliser la Proposition 3. En la combinant avec [6, Theorem 33], on obtient tout d'abord que les quatre familles mentionnées dans l'énoncé du Théorème 1 épuisent à isomorphisme près toutes les représentations lisses irréductibles admissibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Le fait que ces familles soient disjointes découle directement de ce que l'on a montré dans les sections précédentes. On commence par remarquer que le caractère trivial est la seule représentation de dimension finie de G_S qui apparaît dans la liste, donc qu'elle ne peut être isomorphe à aucune autre représentation de cette liste. Par ailleurs, le Théorème 2 associé à [6, Corollary 36 (1)] assure qu'il n'existe pas d'entrelacement entre les trois premières familles, et le Corollaire 3 implique que les représentations supersingulières ne peuvent être isomorphes aux autres représentations de la liste, ce qui achève la démonstration.

Remarque 6. *Comme nous l'avons remarqué dans l'introduction, ceci implique que les représentations supersingulières de $SL_2(F)$ sont exactement ses représentations supercuspidales (i.e. qui ne sont pas sous-quotient d'une représentation en série principale).*

4. REPRÉSENTATIONS SUPERSINGULIÈRES DE $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Nous supposons désormais que $F = \mathbb{Q}_p$. Par suite, k_F est le corps \mathbb{F}_p à p éléments et l'on peut choisir (comme nous le faisons à partir de maintenant) $\varpi_F = p$ comme uniformisante. Puisque $f = 1$, nous allégerons les notations en notant r au lieu de \vec{r} .

Cette section s'organise comme suit : nous commençons par rappeler quelques résultats de Breuil concernant les représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ (section 4.1), que nous combinons ensuite aux résultats de la Section 2 pour en déduire le Théorème 3.

Remarque 7. *Les résultats inhérents aux non-isomorphismes entre représentations supersingulières de G_S (Section 4.4) peuvent être obtenus bien plus rapidement à partir de l'étude des modules simples sur la pro- p -algèbre de Hecke de G_S , comme cela est fait dans [2].*

4.1. Représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. L'étude précise des représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est essentiellement due à Breuil [8] qui a démontré, à l'aide des résultats de Barthel-Livné [6, Theorem 34], le théorème suivant.

Théorème 8. *Les représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont exactement les représentations $\pi(r, 0, 1)$ avec $r \in \{0, \dots, p-1\}$.*

L'obtention de ce résultat repose fondamentalement sur l'étude de la structure de l'espace des $I(1)$ -invariants de $\pi(r, 0, 1)$ [8, Théorème 3.2.4⁴ et Remarque 3.2.5].

Théorème 9. *Pour tout $0 \leq r \leq p-1$, on a :*

$$(4) \quad \pi(r, 0, 1)^{I(1)} = \overline{\mathbb{F}}_p[I_2, x^r] \oplus \overline{\mathbb{F}}_p[\beta, x^r] .$$

4. Nous donnons une forme légèrement différente de celle de [8], mais un calcul direct à l'aide de la K -équivariance montre que l'on a $[\alpha, y^r] = [\beta, x^r]$ de sorte que nous avons effectivement le même énoncé.

L'étude de la preuve de ce théorème montre qu'elle reste valable si l'on cherche à calculer les $I_S(1)$ -invariants de $\pi(r, 0, 1)$: en effet, la démonstration donnée par Breuil prouve que l'espace des invariants de $\pi(r, 0, 1)$ sous le sous-groupe de G engendré par les matrices unipotentes inférieures et supérieures est égal au $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel de dimension 2 ayant pour base $\{[I_2, x^r], [\beta, x^r]\}$. Ces deux éléments sont $I_S(1)$ -invariants (puisque $I(1)$ -invariants), ce qui fournit un résultat analogue au Théorème 9 pour G_S .

Théorème 10. *Pour tout $r \in \{0, \dots, p-1\}$, l'espace des vecteurs $I_S(1)$ -invariants de $\pi(r, 0, 1)$ est égal à*

$$\pi(r, 0, 1)^{I_S(1)} = \overline{\mathbb{F}}_p[I_2, x^r] \oplus \overline{\mathbb{F}}_p[\beta, x^r] = \pi(r, 0, 1)^{I(1)} .$$

Cet énoncé fait naturellement apparaître deux représentations de G_S contenues dans $\pi(r, 0, 1)$: la représentation engendrée sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ par le vecteur $v_{r,\infty} := [I_2, x^r]$, que nous noterons $\pi_{r,\infty}$, et celle engendrée par $v_{r,0} := [\beta, x^r]$, que nous noterons $\pi_{r,0}$.

Remarque 8. Si l'on veut être (très) prudent, l'énoncé du Théorème 10 pousse d'abord à considérer toute la famille de vecteurs $I_S(1)$ -invariants $v_{r,\lambda} := v_{r,0} + \lambda v_{r,\infty}$ ($\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$) et les sous-représentations $\pi_{r,\lambda}$ de G_S qu'ils engendrent sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Comme nous le verrons dans le Corollaire 5 de la section 4.3, les seules représentations irréductibles qui apparaissent dans cette famille sont $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$. Les autres sont en fait toutes égales à $\pi(r, 0, 1)$.

4.2. Irréductibilité de $\pi_{r,\infty}$ et de $\pi_{r,0}$. Jusqu'à la fin de la section 4.3, on fixe un entier $r \in \{0, \dots, p-1\}$. Comme nous allons le démontrer dans la Section 4.2.3, l'irréductibilité des représentations $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ repose essentiellement sur le fait que leurs espaces de vecteurs $I_S(1)$ -invariants sont de dimension 1 (Proposition 6).

4.2.1. Un résultat technique important.

Lemme 3. *Les représentations $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$ n'ont pas d'élément commun non nul :*

$$\pi_{r,0} \cap \pi_{r,\infty} = \{0\} .$$

Démonstration. Soient $\bar{f} \in \pi_{r,0} \cap \pi_{r,\infty}$ et $f \in \text{ind}_{KZ}^G(\sigma_r)$ un relèvement de \bar{f} . Dire que \bar{f} est dans $\pi_{r,\infty}$ signifie que l'on peut écrire f sous la forme d'une somme finie

$$(5) \quad f = \sum_{i \in I} \lambda_i s_i v_{r,\infty} + T_r(f_\infty)$$

avec $\lambda_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et $s_i \in G_S$ pour tout $i \in I$, et $f_\infty \in \text{ind}_{KZ}^G(\sigma_r)$.

De même, dire que \bar{f} est dans $\pi_{r,0}$ signifie que l'on peut l'écrire sous la forme d'une somme finie

$$(6) \quad f = \sum_{j \in J} \mu_j t_j v_{r,0} + T_r(f_0)$$

avec $\mu_j \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et $t_j \in G_S$ pour tout $j \in J$, et $f_0 \in \text{ind}_{KZ}^G(\sigma_r)$.

La Proposition 2 nous permet par ailleurs d'écrire $f = f_p + f_{\text{imp}}$ (resp. $f_\infty = f_{\infty,p} + f_{\infty,\text{imp}}$, $f_0 = f_{0,p} + f_{0,\text{imp}}$) avec f_p (resp. $f_{\infty,p}$, $f_{0,p}$) à support dans X_p et f_{imp} (resp. $f_{\infty,\text{imp}}$, $f_{0,\text{imp}}$) à support dans X_{imp} . On peut donc réécrire l'expression (5) sous la forme

$$(7) \quad f_{\text{imp}} - T_r(f_{\infty,p}) = \sum_{i \in I} \lambda_i s_i v_{r,\infty} + T_r(f_{\infty,\text{imp}}) - f_p .$$

Rappelons alors que $v_{r,\infty} = \overline{[I_2, x^r]}$ est à support dans le sommet x_0 et que l'on a $T_r(X_{imp}) \subset X_p$ par (1), de sorte que le membre de droite de (7) est à support dans X_p . Le membre de gauche de (7) est quant à lui de support contenu dans X_{imp} car (1) assure que $T_r(X_p) \subset X_{imp}$. Etant donné que $X_p \cap X_{imp} = \emptyset$, l'expression (7) n'est possible que si ses deux membres sont nuls, ce qui implique en particulier que $f_{imp} \in \text{Im } T_r$.

De même, l'expression (6) peut être réécrite sous la forme

$$(8) \quad f_{imp} - T_r(f_{0,p}) = \sum_{j \in J} \mu_j t_j v_{r,0} + T_r(f_{0,imp}) - f_p.$$

Sachant cette fois que $v_{r,0} = \overline{[\alpha, y^r]}$ est à support dans le sommet x_1 , on obtient par le même raisonnement que le membre de droite de (8) est à support dans X_{imp} tandis que le membre de gauche est à support dans X_p , ce qui n'est de nouveau possible que si ces deux membres sont nuls. Ceci implique en particulier que $f_{imp} \in \text{Im } T_r$.

Par linéarité de l'opérateur T_r , on obtient alors que $f = f_p + f_{imp} \in \text{Im } T_r$, ce qui signifie que \bar{f} est nulle dans $\pi(r, 0, 1)$ et termine la démonstration. \square

4.2.2. $I_S(1)$ -invariants de $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$.

Proposition 6. *Soit $r \in \{0, \dots, p-1\}$.*

L'espace des $I_S(1)$ -invariants de $\pi_{r,\infty}$ (resp. $\pi_{r,0}$) est un $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel de dimension 1 engendré par $v_{r,\infty}$ (resp. $v_{r,0}$).

Démonstration. On traite le cas de $\pi_{r,\infty}$, celui de $\pi_{r,0}$ s'obtenant de la même manière. Il est tout d'abord clair que le Théorème 10 assure que $\overline{\mathbb{F}}_p v_{r,\infty}$ est contenu dans $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$. Réciproquement, soit f un élément non nul de $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$. Un tel f appartient a fortiori à $\pi(r, 0, 1)^{I_S(1)}$ de sorte que, de nouveau grâce au Théorème 10, on peut l'écrire sous la forme

$$(9) \quad f = av_{r,\infty} + bv_{r,0}$$

avec $a, b \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non simultanément nuls.

Par ailleurs, f est un élément de $\pi_{r,\infty} = \langle G_S \cdot v_{r,\infty} \rangle$ donc il peut aussi s'écrire sous la forme d'une somme finie

$$(10) \quad f = \sum_{i \in I} \lambda_i s_i v_{r,\infty}$$

avec $\lambda_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et $s_i \in G_S$ pour tout $i \in I$.

En comparant les identités (9) et (10), on obtient alors que

$$bv_{r,0} = -av_{r,\infty} + \sum_{i \in I} \lambda_i s_i v_{r,\infty} \in \pi_{r,0} \cap \pi_{r,\infty}$$

ce qui n'est possible que si $b = 0$ (Lemme 3), i.e. si $f = av_{r,\infty}$ est colinéaire à $v_{r,\infty}$. \square

4.2.3. Le résultat d'irréductibilité. La Proposition 1 nous permet maintenant d'obtenir facilement l'irréductibilité de nos représentations supersingulières.

Proposition 7. *Les représentations $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$ sont des représentations lisses irréductibles non nulles de G_S .*

Démonstration. Soit $z \in \{0, \infty\}$. La non nullité de la représentation $\pi_{r,z}$ est évidente puisqu'elle contient le vecteur non nul $v_{r,z}$ (cf Théorème 10 par exemple). De même, la lissité de l'action de G_S provient directement de celle de l'action de G sur $\pi(r, 0, 1)$.

Soit maintenant π une sous-représentation non nulle de $\pi_{r,z}$. La Proposition 1 appliquée à $P = I_S(1)$ assure que π contient un vecteur $v \neq 0$ qui est $I_S(1)$ -invariant. Ce vecteur appartient a fortiori à $\pi_{r,z}^{I_S(1)}$ qui est de dimension 1 sur \mathbb{F}_p par la Proposition 6. On en déduit donc que v est colinéaire à $v_{r,z}$ avec coefficient de proportionnalité non nul, ce qui implique que le vecteur $v_{r,z}$ est contenu dans π , et donc que $\pi = \pi_{r,z}$ puisque $\pi_{r,z}$ est par définition engendrée par $v_{r,z}$. \square

4.3. Décomposition en somme directe de $\pi(r, 0, 1)|_{G_S}$.

Théorème 11. *L'inclusion naturelle de $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ dans $\pi(r, 0, 1)$ induit un isomorphisme de G_S -représentations :*

$$\pi(r, 0, 1) = \pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0} .$$

Démonstration. D'après le Lemme 3, la somme de droite est bien une somme directe. Par suite, on dispose d'une inclusion canonique de $\pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0}$ dans $\pi(r, 0, 1)$ (provenant des inclusions naturelles de $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ dans $\pi(r, 0, 1)$) qui est clairement injective, \mathbb{F}_p -linéaire et G_S -équivariante. Le fait que tout élément de $\pi(r, 0, 1)$ peut s'écrire comme somme d'un élément de $\pi_{r,0}$ et d'un élément de $\pi_{r,\infty}$ s'obtient par un calcul facile détaillé dans l'Annexe C. \square

Corollaire 5. *Les seules sous- G_S -représentations irréductibles non nulles contenues dans $\pi(r, 0, 1)$ sont $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$.*

Démonstration. Soit π une telle sous-représentation. D'après le Théorème 22, on peut la décomposer sous la forme $\pi = (\pi \cap \pi_{r,\infty}) \oplus (\pi \cap \pi_{r,0})$. Chaque terme de cette somme directe est une sous- G_S -représentation de π , donc est nulle ou égale à π par irréductibilité de π . Mais π étant non nulle, le Lemme 3 implique que l'un des deux membres est nécessairement nul tandis que l'autre est par suite égal à π . Par ailleurs, la Proposition 7 assure que $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ sont elles aussi irréductibles. On en déduit que $\pi \cap \pi_{r,\infty}$ (resp. $\pi \cap \pi_{r,0}$) doit être nulle ou égale à $\pi_{r,\infty}$ (resp. $\pi_{r,0}$). La comparaison des deux expressions de $\pi \cap \pi_{r,\infty}$ (resp. $\pi \cap \pi_{r,0}$) ainsi obtenues prouve alors que l'on doit avoir $\pi = \pi_{r,\infty}$ ou $\pi = \pi_{r,0}$, ce qui termine la preuve. \square

4.4. Isomorphismes entre les représentations $\pi_{r,\lambda}$. On se propose dans cette section de déterminer tous les entrelacements pouvant exister entre les représentations $\pi_{r,z}$ ($0 \leq r \leq p-1$, $z \in \{0, \infty\}$).

Rappelons tout d'abord que Breuil a démontré les résultats suivants pour les représentations supersingulières de G [8, Corollaires 4.1.3 et 4.1.5].

Théorème 12. *Soit $r \in \{0, \dots, p-1\}$.*

- (1) *Il existe un unique isomorphisme de G -représentations*

$$\pi(r, 0, 1) \simeq \pi(p-1-r, 0, \omega^r)$$

envoyant $v_{r,\infty}$ sur $v_{p-1-r,0}$.

- (2) *Les seules G -représentations isomorphes à $\pi(r, 0, 1)$ sont les suivantes :*

$$\pi(r, 0, 1) ; \pi(r, 0, \mu_{-1}) ; \pi(p-1-r, 0, \omega^r) ; \pi(p-1-r, 0, \mu_{-1}\omega^r) .$$

On note ω le caractère cyclotomique modulo p vu comme caractère de \mathbb{Q}_p^\times via l'isomorphisme de réciprocité (faisant correspondre les uniformisantes aux Frobenius géométriques) et on rappelle que μ_{-1} désigne le caractère non ramifié de \mathbb{Q}_p^\times envoyant p sur -1 .

Remarquons ici que, par construction de nos représentations supersingulières, un isomorphisme de G_S -représentations $\pi_{r,z} \simeq \pi_{s,y}$ est uniquement déterminé par

l'image de $v_{r,z}$ qui doit être un élément de $\pi_{s,y}^{I_S(1)}$. La Proposition 6 implique alors en particulier que l'espace d'entrelacements entre $\pi_{r,z}$ et $\pi_{s,y}$ est de dimension (sur $\overline{\mathbb{F}}_p$) majorée par 1.

Déterminons les entrelacements existants entre deux représentations supersingulières $\pi_{r,z}$ et $\pi_{s,y}$, où (r,z) et (s,y) sont deux paires arbitraires de paramètres. On commence tout d'abord par remarquer que le premier point du Théorème 12 implique l'existence d'un isomorphisme de G_S -représentations

$$(11) \quad \pi_{r,\infty} \simeq \pi_{p-1-r,0}$$

pour tout $r \in \{0, \dots, p-1\}$. En faisant agir des sous-groupes bien choisis de G_S sur de bons espaces de vecteurs invariants, nous allons montrer qu'il n'existe pas d'autre entrelacement possible. De nouveau, on fixe $r \in \{0, \dots, p-1\}$.

4.4.1. Action du sous-groupe d'Iwahori de G_S . Les vecteurs $v_{r,0}$ et $v_{r,\infty}$ sont fixes sous l'action de $I_S(1)$, de sorte que le groupe I_S agit sur eux via le quotient $I_S/I_S(1)$ qui est isomorphe au tore diagonal de $SL_2(\mathbb{F}_p)$, lui-même isomorphe au groupe cyclique \mathbb{F}_p^\times . Par suite, l'action de I_S sur $v_{r,0}$ et $v_{r,\infty}$ sera donnée par des caractères lisses $\mathbb{F}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

Notons ω_1 le caractère fondamental de Serre de niveau 1 ([20], section 2.3). Pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_p^\times$, on a alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} [I_2, x^r] = [I_2, \sigma_r \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right) (x^r)] = \lambda^r [I_2, x^r]$$

de sorte que I_S agit sur $v_{r,\infty}$ par le caractère ω_1^r , tandis que

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} [\beta, x^r] = [\beta, \sigma_r \left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) (x^r)] = \lambda^{-r} [\beta, x^r]$$

de sorte que I_S agit sur $v_{r,0}$ par ω_1^{-r} .

Sachant que les $I_S(1)$ -invariants de $\pi_{r,\infty}$ et de $\pi_{r,0}$ sont de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (Proposition 6), on a donc prouvé le résultat suivant.

Proposition 8. *Le sous-groupe d'Iwahori I_S de G_S agit sur $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$ (resp. $\pi_{r,0}^{I_S(1)}$) par le caractère ω_1^r (resp. ω_1^{-r}), où ω_1 désigne le caractère fondamental de Serre de niveau 1.*

Ceci nous permet d'obtenir la non-existence d'un grand nombre d'isomorphismes.

Proposition 9. *Soient $r, s \in \{0, \dots, p-1\}$ avec $r \notin \{0, \frac{p-1}{2}, p-1\}$.*

- (1) *Si $s \neq r$, alors $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$ (respectivement : $\pi_{r,0}$ et $\pi_{s,0}$) ne sont pas isomorphes.*
- (2) *Si $s \neq p-1-r$, alors $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,0}$ ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Nous allons prouver ces deux assertions par contraposition en remarquant que si deux des représentations de l'énoncé sont isomorphes, alors I_S doit agir par le même caractère sur leurs espaces de vecteurs $I_S(1)$ -invariants.

Supposons tout d'abord que $\omega_1^r = \omega_1^s$, ce qui est une condition nécessaire pour que $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$ soient des représentations isomorphes de G_S . Cela signifie que ω_1^{r-s} est le caractère trivial, donc que $p-1$ divise $r-s$ (car ω_1 est d'ordre $p-1$). Comme r et s sont tous deux compris entre 0 et $p-1$, les seules valeurs de $r-s$ divisibles par $p-1$ sont $-(p-1)$, 0 et $(p-1)$. Les première et dernière valeurs sont exclues car on a supposé $r \neq 0$ et $r \neq p-1$. On en déduit donc que $r = s$, d'où la première assertion pour $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$. Le résultat pour $\pi_{r,0}$ et $\pi_{s,0}$ s'obtient de même en travaillant avec l'exposant $-r+s$.

Pour la seconde assertion, nous devons cette fois avoir $\omega_1^r = \omega_1^{-s}$, ce qui implique que $p-1$ divise $r+s$. De nouveau, comme r et s sont dans $\{0, \dots, p-1\}$, les seules valeurs de $r+s$ divisibles par $p-1$ sont 0 , $p-1$ et $2(p-1)$. La première valeur est exclue car elle n'est atteinte que pour $r=0=s$ (et l'on a supposé $r \neq 0$) ; la dernière valeur est exclue car elle n'est atteinte que pour $r=p-1=s$ (et l'on a supposé $r \neq p-1$). Il faut donc que $r+s = p-1$, ce qui revient à dire que $s = p-1-r$. \square

4.4.2. *Action du sous-groupe compact maximal K_S .* Il nous reste maintenant à traiter le cas où $r \in \{0, \frac{p-1}{2}, p-1\}$. Lorsque $r = \frac{p-1}{2}$, l'isomorphisme (11) donne

$$\pi_{\frac{p-1}{2}, \infty} \simeq \pi_{\frac{p-1}{2}, 0}$$

donc les deux sous- G_S -représentations de $\pi(r, 0, 1)$ obtenues par le Corollaire 5 sont isomorphes.

Remarquons en outre que le cas $r = p-1$ se déduit du cas $r = 0$ grâce à l'isomorphisme (11), de sorte qu'il ne nous reste qu'à étudier le cas où $r = 0$. Nous allons montrer que les espaces de vecteurs K_S -invariants $\pi_{0, \infty}^{K_S}$ et $\pi_{0, 0}^{K_S}$ sont alors de dimension différente sur $\overline{\mathbb{F}}_p$: ceci assurera qu'ils ne peuvent pas être isomorphes, et donc que les représentations $\pi_{0, \infty}$ et $\pi_{0, 0}$ sont nécessairement non-isomorphes.

Proposition 10. (1) $\pi_{0, 0}^{K_S} = \{0\}$.

(2) $\pi_{0, \infty}^{K_S} = \pi_{0, \infty}^{I_S(1)} = \overline{\mathbb{F}}_p v_{0, \infty}$.

Démonstration. Puisque $I_S(1)$ est un sous-groupe de K_S , on sait que pour toute représentation π de G_S , π^{K_S} est un sous-espace vectoriel de $\pi^{I_S(1)}$. D'après la Proposition 6, il nous suffit donc de tester si $v_{0, \infty}$ et $v_{0, 0}$ sont fixes sous l'action de K_S . D'après la propriété *ii*) rappelée à la fin de la Section 1.5, il est clair que $v_{0, \infty}$ est fixe sous l'action de K_S , ce qui nous donne la seconde assertion.

D'autre part, un calcul immédiat et une comparaison avec [8, Formule (4) page 7] montrent que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} [\beta, 1] - [\beta, 1]$ n'appartient pas à l'image de l'opérateur

T_0 , ce qui signifie que $v_{0, 0}$ n'est pas fixe sous l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et prouve donc la première assertion. \square

4.5. **Preuve du Théorème 3.** Remarquons tout d'abord que les représentations $\pi_{r, \infty}$ et $\pi_{r, 0}$ sont effectivement des représentations supersingulières de G_S :

- le Théorème 11 et les isomorphismes (11) assurent que $\pi_{r, \infty}$ et $\pi_{r, 0}$ sont de dimension infinie, donc qu'elles ne peuvent être isomorphes à un caractère ;
- la Proposition 6 assure que les représentations $\pi_{r, \infty}$ et $\pi_{r, 0}$ ne peuvent pas être isomorphes à des séries principales, pas plus qu'à $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, car ces représentations ont des espaces de vecteurs $I_S(1)$ -invariants de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (cf. Section 3) ;
- enfin, les représentations $\pi_{r, \infty}$ et $\pi_{r, 0}$ ne peuvent être isomorphes à Sp_S car ceci entraînerait (par le Théorème 2 puis par réciprocity de Frobenius compacte) que $\pi(r, 0, 1)$ serait une G -représentation isomorphe à Sp , ce qui contredit les résultats de Breuil et Barthel-Livné.

Le Théorème 3 découle maintenant facilement des résultats prouvés précédemment :

- le quatrième point est exactement l'énoncé du Théorème 11 ;
- la Proposition 7 et le Corollaire 5 prouvent le premier point ;
- la Proposition 9 et la section 4.4.2 démontrent les points 2 et 3.

4.6. Vers une correspondance de Langlands modulo p ? On note $G_{\mathbb{Q}_p} := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p , ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2, et $\text{ind}(\omega_2^{r+1})$ l'unique représentation irréductible de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ ayant pour déterminant ω_2^{r+1} et dont la restriction au sous-groupe d'inertie de $G_{\mathbb{Q}_p}$ vaut $\omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}$.

Dans le cas des représentations modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, Breuil a démontré [8, Corollaire 4.2.3] l'existence d'une unique bijection entre les classes d'isomorphisme des représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et les classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ de $G_{\mathbb{Q}_p}$ qui envoie $\pi(r, 0, \chi)$ sur $\text{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi$ pour tout entier $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et tout caractère $\chi : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}^\times$. Ceci lui permet de définir ce qu'il appelle une « correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p » [8, Définition 4.2.4] qui relie les classes d'isomorphisme de représentations semi-simples de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ à certaines classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Regardons maintenant ce qu'il advient lorsque l'on essaye d'établir un tel lien entre représentations galoisiennes et représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. D'après le Théorème 11, on peut faire correspondre les représentations galoisiennes $\text{ind}(\omega_2^{r+1})$ à des paquets de représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\text{ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_{r,\infty}; \pi_{p-1-r,0}\}.$$

Une première différence avec le cas de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est que les représentations supersingulières apparaissent par *paquets* de taille 1 (si $r = \frac{p-1}{2}$) ou 2 (sinon). De plus, le Théorème 3 assure que les paquets correspondant à r et à $p-1-r$ sont les mêmes, ce qui se traduit du côté galoisien par le fait que les représentations projectives induites par $\text{ind}(\omega_2^{r+1})$ et $\text{ind}(\omega_2^{p-1-(r+1)})$ sont isomorphes.

Une seconde différence notable avec le cas de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est que l'on perd la possibilité de distinguer la torsion par les caractères du côté galoisien : en effet, si l'on reprend la correspondance obtenue par Breuil et qu'on la restreint à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, on voit que quelque soit le caractère $\chi : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}^\times$ et quel que soit l'entier $r \in \{0, \dots, p-1\}$, les représentations galoisiennes $\text{ind}(\omega_2^{r+1})$ et $\text{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi$ correspondent au même paquet $\{\pi_{r,\infty}; \pi_{p-1-r,0}\}$ de représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Par suite, si l'on souhaite définir une bijection analogue à celle obtenue pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatible à la restriction des représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, il faut considérer la flèche⁵

$$\text{proj} \circ \text{ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_{r,\infty}; \pi_{p-1-r,0}\}$$

qui met en bijection l'ensemble des *paquets* de représentations supersingulières de G_S exhibés ci-dessus d'une part, et d'autre part l'ensemble des représentations galoisiennes *projectives* de dimension 2 à isomorphisme et à torsion par un caractère de F^\times près.

5. On note proj l'application naturelle de $GL_2(\dots)$ vers $PGL_2(\dots)$.

ANNEXE A. ÉTUDE DES SÉRIES PRINCIPALES « À LA BARTHEL-LIVNÉ »

L'objectif de cette annexe est de donner une démonstration du Théorème 4 en suivant les idées de la preuve donnée par Barthel-Livné dans le cadre de l'étude des représentations en séries principales de G et en effectuant les modifications techniques nécessaires pour les adapter au cas des représentations de G_S .

On commence tout d'abord par donner une autre caractérisation des éléments de $Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$ en partant de la décomposition de Bruhat :

$$G_S = B_S \sqcup B_S sU \quad (\text{union disjointe}) .$$

Ceci implique que tout élément U -invariant $f \in Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est entièrement déterminé par ses valeurs en I_2 et en s .

On définit alors une fonctionnelle j sur $Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$ par la formule suivante :

$$\forall x \in F, \quad j(f)(x) := f(su(x))$$

où l'on a posé $u(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$. En remarquant que l'on a

$$(12) \quad su(x) = \begin{pmatrix} x^{-1} & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} ,$$

on obtient, puisque f est localement constante, que $j(f)$ est localement constante et que, pour x assez grand (i.e. $v_F(x)$ très négative), on a [7, page 14]

$$j(f)(x) = c_f \eta(x^{-1})$$

où $c_f := f(I_2)$. L'application j est donc à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{J}(\eta)$ des fonctions $\phi : F \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ localement constantes pour lesquelles il existe une constante c_ϕ telle que $\phi(x) = c_\phi \eta(x^{-1})$ pour tout x assez grand, et induit en fait clairement un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espaces vectoriels entre $Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$ et $\mathcal{J}(\eta)$. Ceci permet de munir ce dernier d'une structure de G_S -module par transport de structure à partir de $Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$. On a de plus les propriétés suivantes.

Lemme 4. *Soit ϕ un élément de $\mathcal{J}(\eta)$. Soient $x, y \in F$. Alors :*

- (1) $u(y)\phi(x) = \phi(x + y) ;$
- (2) $\alpha_0\phi(x) = \eta(\varpi_F^{-1})\phi(\varpi_F^{-2}x) ;$
- (3) $\alpha_0^{-1}\phi(x) = \eta(\varpi_F)\phi(\varpi_F^2x).$

Démonstration. Ce résultat est l'analogue de [7, Lemma 17] et se prouve par calcul direct. Pour le premier point, on écrit simplement que si $\phi = j(f)$, alors

$$u(y)\phi(x) := u(y)f(su(x)) = f(su(x)u(y)) = f(su(x+y)) = \phi(x+y)$$

tandis que les deux derniers points sont conséquences du calcul plus général suivant :
 $\forall \lambda \in F^\times$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \phi(x) &= f(su(x) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} x^{-1} & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right) \quad \text{par (12)} \\
&= \eta(x^{-1}) f\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ x^{-1}\lambda & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \eta(x^{-1}) f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1}x \\ \lambda x^{-1} & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \eta(x^{-1}) f\left(\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1}x \\ \lambda x^{-1} & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \eta(x^{-1}) f\left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1}x & 0 \\ 0 & \lambda x^{-1} \end{pmatrix} su(\lambda^{-2}x)\right) \\
&= \eta(\lambda^{-1}) \phi(\lambda^{-2}x) .
\end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant devoir distinguer selon que le caractère η est ramifié ou non.

A.1. Le cas non ramifié. On suppose tout d'abord que le caractère η est non ramifié, i.e. qu'il est trivial sur \mathcal{O}_F^\times , et l'on pose $\Lambda := \eta(\varpi_F^{-1})$. On note $f_0 \in \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ l'unique élément K_S -invariant valant 1 en I_2 et l'on pose $\phi_0 := j(f_0)$. Un calcul direct fournit facilement l'identité suivante :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_F(x) \geq 0 ; \\ \Lambda^{v_F(x)} & \text{si } v_F(x) \leq 0 . \end{cases}$$

On dispose alors d'un analogue un peu plus poussé de [7, Proposition 18.1] qui nécessite d'introduire la notation suivante : pour tout entier $i \geq 1$, on note $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{O}_F$ un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\varpi_F^i \mathcal{O}_F$.

Lemme 5. *On a les deux identités suivantes :*

- (1) $\sum_{x \in \mathcal{R}_1} n(x/\varpi_F) \phi_0 = (1 - \Lambda^{-1}) \mathbf{1}_{\varpi_F^{-1} \mathcal{O}_F} ;$
- (2) $\sum_{x \in \mathcal{R}_2} n(x/\varpi_F^2) \phi_0 = (1 - \Lambda^{-1}) \mathbf{1}_{\varpi_F^{-2} \mathcal{O}_F} .$

Démonstration. Tout comme dans la preuve de Barthel-Livné, on commence par remarquer que pour tout $y \in F$, on a

$$\begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{R}_1} n(x/\varpi_F) \phi_0(y) = \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \phi_0(y + x/\varpi_F) ; \\ \sum_{x \in \mathcal{R}_2} n(x/\varpi_F^2) \phi_0(y) = \sum_{x \in \mathcal{R}_2} \phi_0(y + x/\varpi_F^2) . \end{cases}$$

A partir de là, il suffit de nouveau de distinguer selon la valuation F -adique de y et de calculer. Pour le premier point, on doit traiter 3 cas distincts :

- si $v_F(y) < -1$, alors on a $v_F(y + x/\varpi_F) = v_F(y) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{R}_1$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathcal{R}_1} \phi_0(y + x/\varpi_F) &= \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \Lambda^{v_F(y)} \\
&= q \Lambda^{v_F(y)} \\
&= 0 \\
&= (1 - \Lambda^{-1}) \mathbf{1}_{\varpi_F^{-1} \mathcal{O}_F}(y);
\end{aligned}$$

- si $v_F(y) > -1$, alors on a $v_F(y) \geq 0$ donc $v_F(y + x/\varpi_F) = v_F(x/\varpi_F) = -1$ si $x \neq 0$, de sorte que l'on a cette fois

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \phi_0(y + x/\varpi_F) &= \phi_0(y) + \sum_{\substack{x \in \mathcal{R}_1 \\ x \neq 0}} \Lambda^{-1} \\ &= 1 + (q-1)\Lambda^{-1} \\ &= 1 - \Lambda^{-1} \\ &= (1 - \Lambda^{-1})\mathbf{1}_{\varpi_F^{-1}\mathcal{O}_F}(y); \end{aligned}$$

- si $v_F(y) = -1$, alors il existe un unique $x_0 \in \mathcal{R}_1$ tel que $x_0 + \varpi_F y \equiv 0 \pmod{\varpi_F}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \phi_0(y + x/\varpi_F) &= \phi_0(y + x_0/\varpi_F) + \sum_{\substack{x \in \mathcal{R}_1 \\ x \neq x_0}} \Lambda^{-1} \\ &= 1 + (q-1)\Lambda^{-1} \\ &= 1 - \Lambda^{-1} \\ &= (1 - \Lambda^{-1})\mathbf{1}_{\varpi_F^{-1}\mathcal{O}_F}(y) \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver la première identité.

Pour le second point, on effectue un raisonnement similaire, en distinguant un cas supplémentaire :

- si $v_F(y) < -2$, alors on a $v_F(y + x/\varpi_F^2) = v_F(y) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{R}_2$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{R}_2} \phi_0(y + x/\varpi_F^2) &= \sum_{x \in \mathcal{R}_2} \Lambda^{v_F(y)} \\ &= q^2 \Lambda^{v_F(y)} \\ &= 0 \\ &= (1 - \Lambda^{-1})\mathbf{1}_{\varpi_F^{-2}\mathcal{O}_F}(y); \end{aligned}$$

- si $v_F(y) > -1$, il faut faire un peu plus attention. On a toujours $v_F(y) \geq 0$, de sorte que

$$v_F(y + x/\varpi_F^2) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \not\equiv 0 \pmod{\varpi_F}; \\ -1 & \text{si } x \equiv 0 \pmod{\varpi_F} \text{ mais } x \neq 0; \\ v_F(y) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Par suite, on a donc cette fois

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{R}_2} \phi_0(y + x/\varpi_F^2) &= \phi_0(y) + \sum_{\substack{x \in \mathcal{R}_2 \\ x \neq 0 \text{ et } x \equiv 0 \pmod{\varpi_F}}} \Lambda^{-1} + \sum_{\substack{x \in \mathcal{R}_2 \\ x \not\equiv 0 \pmod{\varpi_F}}} \Lambda^{-2} \\ &= 1 + (q-1)\Lambda^{-1} + (q^2 - q)\Lambda^{-2} \\ &= 1 - \Lambda^{-1} \\ &= (1 - \Lambda^{-1})\mathbf{1}_{\varpi_F^{-2}\mathcal{O}_F}(y). \end{aligned}$$

- Si $v_F(y) = -2$, alors on écrit $y = \varpi_F^{-2}y_0$ avec $v_F(y_0) = 0$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{R}_2} \phi_0(y + x/\varpi_F^2) &= \sum_{x \in \mathcal{R}_2} \phi_0((y_0 + x)/\varpi_F^2) \\ &= 1 + (q-1)\Lambda^{-1} + (q^2 - q)\Lambda^{-2} \\ &= 1 - \Lambda^{-1} \\ &= (1 - \Lambda^{-1})\mathbf{1}_{\varpi_F^{-2}\mathcal{O}_F}(y) \end{aligned}$$

où le passage de la première ligne à la seconde ligne s'effectue par le même calcul que pour $v_F(y) > -1$.

- Si $v_F(y) = -1$, on écrit cette fois $y = \varpi_F^{-1}y_0$ avec $v_F(y_0) = 0$, de sorte que l'on a comme précédemment

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathcal{R}_2} \phi_0(y + x/\varpi_F^2) &= \sum_{x \in \mathcal{R}_2} \phi_0((y_0 + x\varpi_F)/\varpi_F^2) \\
&= 1 + (q-1)\Lambda^{-1} + (q^2 - q)\Lambda^{-2} \\
&= 1 - \Lambda^{-1} \\
&= (1 - \Lambda^{-1})\mathbf{1}_{\varpi_F^{-2}\mathcal{O}_F}(y)
\end{aligned}$$

ce qui achève de prouver la seconde assertion. \square

Ceci nous permet d'obtenir à l'aide du Lemme 4 un corollaire qui sera important dans la suite.

Corollaire 6. *Si η est un caractère non ramifié non trivial, alors f_0 engendre le G_S -module $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$.*

Démonstration. Dire que η est non trivial équivaut à dire que l'on a $\Lambda \neq 1$ (puisque η est supposé non ramifié). Dans ce cas, les Lemmes 4 et 5 assurent que l'élément ϕ_0 engendre le G_S -module $\mathcal{J}(\eta)$, ce qui prouve notre résultat étant donné que l'on a $f_0 = j^{-1}(\phi_0)$. \square

Remarque 9. Rappelons que, par la décomposition d'Iwasawa $G_S = UT_S K_S$, l'espace des K_S -invariants de $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et que $\{f_0\}$ en est de fait une base.

Avant de prouver le Théorème 4 dans le cas non ramifié, on rappelle que l'on dispose d'une autre décomposition de G_S [7, Section 3.3] :

$$G_S = B_S I_S \sqcup B_S s I_S$$

qui peut être réécrite $G_S = B_S I_S \sqcup B_S \beta_0 I_S$. Ceci nous permet de prouver facilement que $(\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta))^{I_S}$ est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et d'en donner une base explicite, à savoir la famille $\{f_1, f_2\}$ définie par

$$\begin{cases} f_1(I_2) = 1 & ; & f_1(\beta_0) = 0 ; \\ f_2(I_2) = 0 & ; & f_2(\beta_0) = 1 . \end{cases}$$

La fonction f_0 étant K_S -invariante, elle est en particulier I_S -invariante donc peut se décomposer dans la base $\{f_1, f_2\}$. Par définition, on a $f_0(I_2) = 1$ et, puisque $\beta_0 = -\beta_0^{-1} = \alpha_0^{-1}s$, on obtient facilement que $f_0(\beta_0) = \eta(\varpi_F^{-1}) = \Lambda$. On en conclut donc que l'on a

$$(13) \quad f_0 = f_1 + \Lambda f_2$$

Remarquons aussi que l'on a tout aussi facilement les identités suivantes :

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_0 f_1 = \Lambda^{-1} f_1 & ; & \beta_0 f_1 = f_2 ; \\ \alpha_0 f_2 = \Lambda f_2 & ; & \beta_0 f_2 = f_1 . \end{cases}$$

Preuve du Théorème 4 dans le cas non ramifié : Soit V une sous-représentation non nulle de $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. D'après la Proposition 1, l'espace $V^{I_S(1)}$ est non nul. Puisque η est non ramifié, le sous-groupe d'Iwahori agit trivialement sur $(\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta))^{I_S(1)}$, donc en particulier sur $V^{I_S(1)}$, de sorte que l'on a aussi $V^{I_S} \neq \{0\}$.

Soit alors f un élément non nul de V^{I_S} : il est contenu dans $(\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta))^{I_S}$ donc il s'écrit de manière unique sous la forme $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ avec $a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non simultanément nuls. Si $a_1 = 0$ (respectivement : $a_2 = 0$), alors f est colinéaire à f_1 (resp. f_2) avec coefficient de proportionnalité non nul, de sorte que f_1 (resp. f_2) est contenu dans V . D'après (14), on obtient qu'alors f_2 (resp. f_1) est contenu dans V ,

donc que $f_0 = f_1 + \Lambda f_2$ est contenu dans V , et donc que $V = \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ d'après le Corollaire 6.

Supposons maintenant que $a_1 a_2 \neq 0$ et même, quitte à renormaliser f , que $a_1 = 1$. On a alors

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha_0 f = \Lambda^{-1} f_1 + a_2 \Lambda f_2, \\ \beta_0 f = f_2 + a_2 f_1, \end{cases}$$

de sorte que $h := \Lambda \alpha_0 f - f = (\Lambda^2 - 1) a_2 f_2$ est encore un élément de V . Par suite, si l'on a $\Lambda^2 \neq 1$, on obtient que f_2 est contenu dans V , ce qui nous permet de conclure comme précédemment.

Supposons que $\Lambda^2 = 1$. Comme η est supposé non trivial et non ramifié, on a nécessairement $\Lambda \neq 1$, donc on peut supposer que $p \neq 2$ et $\Lambda = -1$, ce qui revient à dire que η est l'unique caractère quadratique non ramifié de F^\times . On a alors $f_0 = f_1 - f_2$, et le système (18) devient alors

$$\begin{cases} \alpha_0 f = -f_1 - a_2 f_2 = -f; \\ \beta_0 f = f_2 + a_2 f_1. \end{cases}$$

Trois cas se présentent :

- ou bien $a_2^2 \neq 1$, auquel cas $\beta_0 f - a_2 f = (1 - a_2^2) f_2$ est contenu dans V avec $1 - a_2^2 \neq 1$, donc $f_2 \in V$ et on peut conclure comme ci-dessus.
- Ou bien $a_2 = -1$, auquel cas $f = f_1 - f_2 = f_0$ est contenu dans V , ce qui implique directement que $V = \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ d'après le Corollaire 6.
- Ou bien $a_2 = 1$, auquel cas on a $f = f_1 + f_2 = \beta_0 f$. Un calcul direct à partir de (14) et de l'identité $s = \alpha_0 \beta_0$ montre alors que $s \cdot f_1 = f_2$ et $s \cdot f_2 = -f_1$, donc que $s \cdot f = f_2 - f_1 = -f_0$. Ceci assure que f_0 est contenu dans la représentation de G_S engendrée par f , elle-même contenue dans V , donc que f_0 est contenu dans V , ce qui permet de terminer la démonstration.

A.2. Le cas ramifié. Supposons maintenant que η soit un caractère ramifié. Nous perdons l'existence de la fonction f_0 , mais nous disposons encore de fonctions analogues aux fonctions f_1 et f_2 définies dans la section précédente. Plus précisément, la décomposition $G_S = B_S I_S(1) \sqcup B_S \beta_0 I_S(1)$ assure que l'espace $(\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta))^{I_S(1)}$ des vecteurs $I_S(1)$ -invariants est encore de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (cf. aussi [6, Lemma 28]) et qu'une base en est donnée par la famille de fonctions $\{\ell_1, \ell_2\}$ caractérisées par :

$$(16) \quad \begin{cases} \ell_1(I_2) = 1 & ; & \ell_1(\beta_0) = 0 & ; \\ \ell_2(I_2) = 0 & ; & \ell_2(\beta_0) = 1 & . \end{cases}$$

Elles satisfont les mêmes relations que leurs analogues du cas non ramifié :

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha_0 \ell_1 = \Lambda^{-1} \ell_1 & ; & \beta_0 \ell_1 = \ell_2 & ; \\ \alpha_0 \ell_2 = \Lambda \ell_2 & ; & \beta_0 \ell_2 = \ell_1 & . \end{cases}$$

Le résultat suivant, qui fait de nouveau appel à l'isomorphisme j , nous permet alors de reprendre les arguments du cas non ramifié pour prouver le Théorème 4 dans le cas ramifié.

Lemme 6. *Soit $x \in F$. Alors :*

- (1) $j(\ell_1)(x) = \begin{cases} \eta(x^{-1}) & \text{si } v_F(x) < 0 ; \\ 0 & \text{si } v_F(x) \geq 0 . \end{cases}$
- (2) $j(\ell_2)(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(x) .$

Démonstration. Pour toute fonction $f \in \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, on a par définition

$$j(f)(x) = f(su(x)) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\right) = \eta(x^{-1})f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ceci donne la formule voulue pour $j(\ell_1)(x)$ lorsque $v_F(x) < 0$ puisque dans ce cas, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $I_S(1)$ qui fixe donc ℓ_1 . Dans les autres cas, on utilise tout simplement le fait que

$$su(x) = (\alpha_0\beta_0)u(x)$$

avec $\alpha_0 \in B_S$ et $u(x) \in I_S(1)$ si $v_F(x) \geq 0$, ce qui prouve les résultats restants grâce à (16). \square

Lemme 7. *On a l'identité suivante dans $\mathcal{J}(\eta)$:*

$$\sum_{x \in \mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} \varpi_F & x \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F} = \mathbf{1}_{\varpi_F \mathcal{O}_F}.$$

Démonstration. Il suffit de fixer $y \in F$ et de faire un calcul direct comme dans le cas non ramifié en faisant attention à la valeur de $v_F(y)$:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} \varpi_F & x \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(y) &= \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} \varpi_F & x \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} j(\ell_2)(y) \\ &:= \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \ell_2(su(y)) \begin{pmatrix} \varpi_F & x \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \ell_2(\beta_0) \begin{pmatrix} 1 & \varpi_F^{-1}x + \varpi_F^{-2}y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(\varpi_F^{-1}x + \varpi_F^{-2}y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{R}_1} \mathbf{1}_{\varpi_F^2 \mathcal{O}_F}(\varpi_F x + y). \end{aligned}$$

Notons que la quatrième égalité provient du Lemme 4. On a donc de nouveau trois cas à distinguer :

- Si $v_F(y) \leq 0$, alors $v_F(\varpi_F x + y) = v_F(y) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{R}_1$ donc la somme est nulle, tout comme l'est $\mathbf{1}_{\varpi_F \mathcal{O}_F}(y)$.
- Si $v_F(y) \geq 2$, alors $v_F(\varpi_F x + y) = 1$ si x est non nul et $v_F(\varpi_F x + y) = v_F(y)$ si x est nul, donc la somme vaut $1 = \mathbf{1}_{\varpi_F \mathcal{O}_F}(y)$.
- Si $v_F(y) = 1$, alors il existe un unique $x_0 \in \mathcal{R}_1$ tel que $y + \varpi_F x_0 \equiv 0 \pmod{\varpi_F^2}$. On a alors $v_F(\varpi_F x + y) = 2$ si $x = x_0$ et $v_F(\varpi_F x + y) = 1$ si $x \neq x_0$, de sorte que la somme est de nouveau égale à $1 = \mathbf{1}_{\varpi_F \mathcal{O}_F}(y)$. \square

Corollaire 7. *La famille $\{\ell_1, \ell_2\}$ engendre la G_S -représentation $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$.*

Démonstration. Remarquons que l'on peut réécrire $j(\ell_1)$ sous la forme

$$j(\ell_1) = \eta^{-1}(\mathbf{1} - \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}).$$

Par suite, les Lemmes 4, 6 et 7 assurent que $\{j(\ell_1), j(\ell_2)\}$ engendre le G_S -module $\mathcal{J}(\eta)$, ce qui équivaut à dire que $\{\ell_1, \ell_2\}$ engendre le G_S -module $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. \square

Preuve du Théorème 4 dans le cas ramifié : Soit V une sous-représentation non nulle de $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. D'après la Proposition 1, l'espace $V^{I_S(1)}$ est non nul. Soit alors f un élément non nul de $V^{I_S(1)}$: il est contenu dans $(\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta))^{I_S(1)}$ donc peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2$ avec $a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non

simultanément nuls. Si $a_1 = 0$ (respectivement : $a_2 = 0$), alors f est colinéaire à ℓ_1 (resp. ℓ_2) avec coefficient de proportionnalité non nul, de sorte que ℓ_1 (resp. ℓ_2) est contenu dans V . D'après (17), on obtient qu'alors ℓ_2 (resp. ℓ_1) est contenu dans V et donc que $V = \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ d'après le Corollaire 7.

Supposons maintenant que $a_1 a_2 \neq 0$ et même, quitte à renormaliser f , que $a_1 = 1$. On a alors, pour tout $t \in \mathcal{O}_F^\times$,

$$(18) \quad \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} f = \eta(t) a_1 \ell_1 + \eta(t^{-1}) a_2 \ell_2 ,$$

ce qui implique que

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} f - \eta(t) f = (\eta(t^{-1}) - \eta(t)) a_2 \ell_2 .$$

Par suite, s'il existe $t \in \mathcal{O}_F$ tel que $\eta(t^2) \neq 1$, on obtient (pour cette valeur de t) que ℓ_2 est contenu dans V , donc de nouveau que $V = \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ grâce au Corollaire 7.

Si $\eta^2(t) = 1$ pour tout $t \in \mathcal{O}_F^\times$, on peut alors reprendre les arguments du cas non ramifié pour conclure puisque l'on a toujours

$$(19) \quad \begin{cases} s \cdot (\ell_1 + a_2 \ell_2) = \ell_2 - a_2 \ell_1 ; \\ \beta_0 f = \ell_2 + a_2 \ell_1 . \end{cases}$$

Si $p \neq 2$, on obtient directement que $2\ell_2 = s \cdot f + \beta_0 f \in V$, donc que $\ell_2 \in V$, ce qui permet d'obtenir que $V = \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ par le Corollaire 7 et par (17).

Si $p = 2$, l'hypothèse $(\eta|_{\mathcal{O}_F^\times})^2 = 1$ implique alors que $\eta|_{\mathcal{O}_F^\times}$ est trivial, i.e. que η est non ramifié, ce qui contredit notre hypothèse de départ et permet de terminer la démonstration.

ANNEXE B. DÉTAILS DE LA PREUVE DU THÉORÈME 4

Le but de cette annexe est de développer la seconde partie de la Section 3.2.2 en adaptant les idées développées dans le cas complexe (cf. par exemple [4, Section 9]) au cadre des représentations modulo p . Avant de commencer, on introduit la notation pratique suivante : pour tout $x \in F$, on pose $u(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$.

B.1. Rappels et résultats préliminaires. On commence par rappeler la définition du foncteur de Jacquet associé au sous-groupe unipotent U . Si (π, V) est une représentation de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on note $V(U)$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{\pi(u)v - v; v \in V, u \in U\}$. Il est clair que cet espace est stable sous l'action de U (par π) ; par suite, l'espace quotient $V_U := V/V(U)$ (que l'on appelle *module de Jacquet de V*) est naturellement muni d'une action du tore diagonal $T_S \simeq B_S/U$ via π (que l'on notera π_U). L'application $[(\pi, V) \mapsto (\pi_U, V_U)]$ définit alors un foncteur J_U allant de la catégorie des représentations lisses de G vers la catégorie des représentations lisses de T , que l'on appelle le *foncteur de Jacquet (associé à U)*.

Les mêmes arguments que ceux utilisés dans le cas classique (voir par exemple [4, Section 9] ou [5, Proposition 4.4.2]) montrent que le foncteur J_U est exact à droite.

Remarque 10. *Remarquons ici qu'il est facile de voir que si χ est un caractère lisse de T_S , on a un isomorphisme naturel $J_U(\chi) \simeq \chi$.*

B.2. Etude de la restriction à B_S . On se donne maintenant un caractère lisse $\eta : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. On note encore $\eta = \eta \otimes \mathbf{1}$ le caractère lisse de B_S obtenu par inflation. L'application d'évaluation en I_2 définit un morphisme surjectif B_S -équivariant

$$\phi : \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) \rightarrow \eta.$$

La décomposition de Bruhat $G_S = B_S \sqcup B_S s U$ permet d'identifier le noyau V de ce morphisme au sous-espace des fonctions de $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ à support dans $B_S s U$.

Proposition 11. *V est une représentation lisse irréductible de B_S .*

Démonstration. On note $C_c^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions lisses $U \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ à support compact. Il est naturellement muni d'une action lisse de B_S définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot \phi := [u(y) \mapsto \phi\left(u\left(\frac{a^{-1}y + b}{a}\right)\right)]$$

et l'application $[f \mapsto [u \mapsto f(su)]]$ induit un isomorphisme de représentations de B_S :

$$(20) \quad \Psi : V \simeq C_c^\infty(U) \otimes \eta^{-1}.$$

En effet, le seul point délicat à vérifier est la compatibilité aux actions de B_S . Pour l'obtenir, on observe que l'on a, pour toute paire $(x, z) \in F \times F$ et tout élément $a \in F^\times$,

$$su(z) \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} su\left(\frac{a^{-1}z + x}{a}\right).$$

On en déduit donc que pour tout $b \in B_S$ et toute fonction $f \in V$, on a :

$$\forall y \in F, \Psi(b \cdot f)(u(y)) = \eta(b^{-1})(b \cdot \Psi(f))(u(y)).$$

Il nous suffit donc de démontrer l'irréductibilité de la représentation $C_c^\infty(U)$ pour conclure. Il est tout d'abord facile de voir que U est la réunion de ses sous-groupes ouverts compacts et que toute fonction $f \in C_c^\infty(U)$ est, par lissité, à support dans un sous-groupe ouvert compact de U (qui dépend bien sûr de f). Nous allons montrer que si l'on fixe un tel sous-groupe ouvert compact de U , sa fonction indicatrice

engendre $C_c^\infty(U)$ comme représentation de B_S , ce qui nous permettra de conclure en utilisant la Proposition 1.

Soient donc U_0 un sous-groupe ouvert compact de U et $C_c^\infty(U_0)$ l'espace des fonctions de $C_c^\infty(U)$ à support dans U_0 . Il est clair que l'espace des vecteurs U_0 -invariants de $C_c^\infty(U_0)$ est de dimension 1 engendré par la fonction indicatrice 1_{U_0} . Comme U_0 est un pro- p -groupe, la Proposition 1 s'applique et toute sous-représentation non nulle de $C_c^\infty(U_0)$ doit donc contenir 1_{U_0} .

Montrons que 1_{U_0} engendre $C_c^\infty(U)$ (et pas seulement $C_c^\infty(U_0)$) comme représentation de B_S . La famille de sous-groupes ouverts $U_n := \alpha_0^n U_0 \alpha_0^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est un système fondamental de voisinages de I_2 dans U . De plus, l'action du groupe U sur 1_{U_n} permet de récupérer toutes les fonctions indicatrices translatées $1_{U_n u}$, $u \in U$. En écrivant que $U_0 = \alpha_0^{-n} U_n \alpha_0^n$ avec $\alpha_0 \in T_S$, on obtient que l'action de $B_S = T_S U_S$ sur 1_{U_0} permet de récupérer tout l'espace $C_c^\infty(U)$, ce qui prouve son irréductibilité comme représentation de B_S . \square

Corollaire 8. *$Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est une représentation de B_S de longueur 2.*

B.3. Fin de la preuve du Théorème 4. Commençons par rappeler qu'il n'existe pas de mesure de Haar sur F à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ [19, Proposition 6]⁶. Ceci implique que le module de Jacquet de $C_c^\infty(U)$ est nul et donc, grâce à l'isomorphisme (20), que l'on a le résultat suivant.

Proposition 12. *Le module de Jacquet de V est nul.*

Corollaire 9. *Le module de Jacquet de $Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est égal au caractère η .*

Démonstration. La suite exacte courte de B_S -représentations

$$(21) \quad 1 \longrightarrow V \longrightarrow Ind_{B_S}^{G_S}(\eta) \longrightarrow \eta \longrightarrow 1$$

fournit, après application du foncteur de Jacquet (qui est exact à droite) et utilisation de la Remarque 10, la suite exacte de T_S -représentations

$$V_U \longrightarrow \left(Ind_{B_S}^{G_S}(\eta) \right)_U \longrightarrow \eta \longrightarrow 1 ,$$

ce qui permet de conclure grâce à la Proposition 12. \square

Corollaire 10. *Soit $\eta = \eta \otimes \mathbf{1}$ un caractère lisse de B_S . Si $\mathbf{1}$ est un sous-quotient de la représentation $Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$ de G_S , alors $\eta = \mathbf{1}$.*

On termine la preuve du Théorème 4 de la manière suivante : si l'on suppose que $Ind_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est une représentation réductible de G_S , elle admet alors nécessairement un sous-quotient de dimension 1 (à cause du Corollaire 8 et de la suite exacte (21)). La Proposition 4 assure que ce sous-quotient doit être le caractère trivial de G_S , ce qui implique que η doit être le caractère trivial par exactitude à droite du foncteur de Jacquet (Corollaire 10).

6. On rappelle qu'une mesure de Haar sur F à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ est une forme linéaire non nulle $C_c^\infty(F) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ invariante par translations.

ANNEXE C. CALCULS DE LA SECTION 4.3

On détaille ici le calcul donnant la surjectivité de l'application du Théorème 11. On sait [8, Corollaires 4.1.1 et 4.1.4] que $\pi(r, 0, 1)$ est une représentation irréductible de G , ce qui implique en particulier que l'on a

$$(22) \quad \pi(r, 0, 1) = \langle G \cdot v_{r,0} \rangle = \langle G \cdot v_{r,\infty} \rangle .$$

Par ailleurs, on dispose aussi des deux égalités suivantes :

$$x^r = \sigma_r \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) (y^r) ;$$

$$y^r = \sigma_r \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) (x^r) ;$$

qui assurent que l'on a les identités suivantes dans $\text{c-ind}_{KZ}^G(\sigma_r)$ (qui sont bien entendues valables a fortiori modulo T_r , i.e. dans $\pi(r, 0, 1)$) :

$$(23) \quad [I_2, y^r] = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^r \right] \in \langle K_S \cdot [I_2, x^r] \rangle ;$$

$$(24) \quad [\alpha, x^r] = \left[\begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ -p & 0 \end{pmatrix} \alpha, y^r \right] \in \langle G_S \cdot [\alpha, y^r] \rangle = \langle G_S \cdot [\beta, x^r] \rangle .$$

Soit maintenant $F \in \pi(r, 0, 1)$. D'après (22), F est combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$g \cdot \overline{[I_2, x^r]} ; \quad h \cdot \overline{[\beta, x^r]}$$

avec $g, h \in G$. Soit f est un tel élément. On peut décomposer g (respectivement h) en un produit fini de matrices g_1, \dots, g_ℓ (resp. h_1, \dots, h_ℓ) de G satisfaisant chacune l'un des quatre cas suivants :

- ou bien g ou h est dans G_S , auquel cas f est dans $\pi_{r,\infty}$ ou dans $\pi_{r,0}$ et il n'y a rien à démontrer.
- Ou bien $\det g$ (resp. $\det h$) est un carré de \mathbb{Q}_p^* , auquel cas il existe $z \in Z$ tel que $g \in G_S Z$ (resp. $h \in G_S Z$). Comme Z agit par des scalaires sur $\pi(r, 0, 1)$, on obtient de nouveau que f appartient à $\pi_{r,\infty}$ (resp. $\pi_{r,0}$).
- Ou bien $\det g = p$ (resp. $\det h = p$), ce qui implique alors que $g\alpha^{-1} \in G_S$ (resp. $h\alpha^{-1} \in G_S$). On peut donc écrire $g = g_0\alpha$ (resp. $h = g_0\alpha$) avec $g_0 \in G_S$, ce qui implique grâce à (24) que

$$f = g \cdot \overline{[I_2, x^r]} = g_0 \cdot \overline{[\alpha, x^r]} \in \langle G_S \cdot \overline{[\alpha, y^r]} \rangle = \langle G_S \cdot \overline{[\beta, x^r]} \rangle = \pi_{r,0} .$$

(resp. : grâce à (23) on a $f = h \cdot \overline{[\alpha, y^r]} = g_0\alpha^2 \cdot \overline{[I_2, y^r]} \in \langle G_S \cdot \overline{[I_2, x^r]} \rangle = \pi_{r,\infty}$ car α^2 est un élément de Z .)

- Ou bien $\det g = u \in \mathbb{Z}_p^*$ n'est pas un carré de \mathbb{Q}_p^* , auquel cas on peut supposer, quitte à multiplier à gauche par un élément de $K_S Z$ (ce qui préserve $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$), que $g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned} f = g \cdot \overline{[I_2, x^r]} &= \overline{\left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x^r \right]} \\ &= \overline{[I_2, \sigma_r \left(\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) (x^r)]} \\ &= \overline{u^r [I_2, x^r]} \end{aligned}$$

où \bar{u} désigne l'image modulo p de u , de sorte que l'on a $f \in \pi_{r,\infty}$.

De même, si l'on suppose que h est de déterminant $u \in \mathbb{Z}_p^*$ qui n'est pas un carré de \mathbb{Q}_p^* , alors on a aussi (en supposant de même que l'on prend $h = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) :

$$\begin{aligned} f = h \cdot \overline{[\alpha, y^r]} &= \overline{\left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha, y^r \right]} \\ &= \overline{[\alpha, \sigma_r \left(\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) (y^r)]} \\ &= \overline{[\alpha, y^r]} \end{aligned}$$

de sorte que f appartient à $\pi_{r,0}$.

Une récurrence immédiate sur ℓ permet alors de conclure que f est effectivement contenu dans $\pi_{r,0}$ ou dans $\pi_{r,\infty}$, et donc que F est finalement décomposable comme somme d'un élément de $\pi_{r,0}$ et d'un élément de $\pi_{r,\infty}$, ce qui prouve la surjectivité recherchée.

RÉFÉRENCES

- [1] R. Abdellatif, *Structure de quelques algèbres de Hecke associées à $SL_2(F)$* , manuscrit (2009).
- [2] R. Abdellatif, *Modules simples sur la pro- p -algèbre de Hecke de $SL_2(F)$* , en préparation (2010).
- [3] R. Abdellatif, *Etude du foncteur des invariants sous l'action du pro- p -Iwahori de $SL_n(F)$* , en préparation (2010).
- [4] C.J. Bushnell, G. Henniart, *The local Langlands conjecture for $GL(2)$* , ed. Springer (2006).
- [5] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55 (1998).
- [6] L. Barthel, R. Livné, *Irreducible modular representations of $GL(2)$ of a local field*, Duke Math. J. 75 (1994), no. 2, 261–292.
- [7] L. Barthel, R. Livné, *Modular representations of $GL(2)$ of a local field : the ordinary, unramified case*, J. Number Theory 55 (1995), 1–27.
- [8] Ch. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, I*. Compositio Math. 138 (2003) no. 2, 165–188.
- [9] Ch. Breuil, *Representations of Galois and of GL_2 in characteristic p* , Cours à l'université de Columbia (Automne 2007).
- [10] C. Cheng, *Mod p representations of $SL_2(F)$* , manuscrit (2010).
- [11] G. Henniart, *Représentations des groupes réductifs p -adiques et de leurs sous-groupes distingués cocompacts*, Journal of Algebra 236 (2001).
- [12] A.V. Jeyakumar, *Principal indecomposable representations for the group $SL(2, q)$* , J. Algebra 30 (1974) 444–458.
- [13] N. Iwahori, H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p -adic Chevalley groups*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 25 (1965) 5–48.
- [14] J.-P. Labesse, R. Langlands, *L -indistinguishability for $SL(2)$* , Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 726–785.
- [15] R. Ollivier, *Le foncteur des invariants sous l'action du pro- p -Iwahori de $GL_2(F)$* , J. für die reine und angewandte Mathematik 635 (2009) 149–185.
- [16] V. Paškūnas, *Coefficient systems and supersingular representations of $GL_2(F)$* , Mémoires de la SMF 99 (2004).
- [17] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque 46 (SMF), 1977.
- [18] M.-F. Vignéras, *Representations modulo p of the p -adic group $GL(2, F)$* , Compositio Math. 140, no. 2 (2004), 333–358.
- [19] M.-F. Vignéras, *Représentations lisses de $GL(2, F)$* , notes de cours de Master 2 (2006).
- [20] M.-F. Vignéras, *Représentations irréductibles de $GL(2, F)$ modulo p* , in « L-functions and Galois representations », LMS Lecture Notes 320 (2007).
- [21] M.-F. Vignéras, *Série principale modulo p de groupes réductifs p -adiques*, GAFA 17 (2008), 2090–2112.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11, 91 405 ORSAY CEDEX, RAMLA.ABDELLATIF@MATH.U-PSUD.FR